ДИС Кирчев 18 10 12

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $n > N$ и $\exists \varepsilon > 0$ такава че

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \text{ при } n > N \text{ за всяко } p$$

при $p = 1$ $\varepsilon > 0$ $|a_{n+1}| < \varepsilon$

$a_1, a_2 \text{ — } a_n \longrightarrow 0$

Нека $a_n = 1/n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ - хармоничен

$S_{2n} = 1 + 1/2 + 1/3 + \text{ — } + 1/2n$

$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \text{ — } + 1/n$

$S_{2n} - S_n = 1/n+1 + 1/n+2 + \text{ — } 1/2n \geq n \frac{1}{2n} \geq 1/2$

$\Rightarrow$ редът не е сходящ

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ - обобщен хармоничен

при $\alpha < 1 \Rightarrow (1/n^2) > 1/n$

разходящ

при $\alpha > 1 \Rightarrow (1/n^2) < 1/n$

сходящ

Нека разгледаме 2 реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \begin{matrix} a_n \geq 0 \\ b_n \geq 0 \end{matrix}$$

монотонно растящи т.е $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n$

Нека $a_n < b_n$

$$\text{от } \left.\begin{matrix} S_1' \leq S_2' \dots \leq S_n' \\ S_1'' \leq S_2'' \dots \leq S_n'' \end{matrix}\right\} \; S_n' \leq S_n'' \leq C$$

||| от сходимостта на b_n следва сходимостта на a_n
от a_n разходимостта на a_n следва разходимостта на b_n

Забележка

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \Rightarrow S_1', S_2' \dots S_n' \text{ и от } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow S_1, S_2 \dots S_n \Big\} \Rightarrow$$

$$S_n' = S_n + A \text{ където } A = \sum_{n-1}^{k-1} a_n$$

Нека ① $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ сходящ

② $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ разходящ т.е

има подредица $0 < a_{n_1} \leq a_{n_2} \dots \leq a_{n_n} \Rightarrow$

② общият член не е краен или 0 [Необходимо условие]

Доказване ①

при $n=1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \le q < 1 \Rightarrow a_2 \le q a_1$

при $n=2 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} \le q < 1 \Rightarrow a_3 \le q a_2$ $\Rightarrow$

$a_2 \le q a_1$
$a_3 \le q^2 a_2 \le q^2 a_1$
$a_n \le q^{n-1} a_1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$

$q < 1 \Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ – геометрична прогр.

при $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ – твърдението не е вярно

изискването трябва да е отделено от 1 с друго число

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$$

Критерии на Даламбер

разглеждаме $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

при $q < 1$ (сходящ) $\Rightarrow$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon \quad n > N$

$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$

② може да съществуват такова ε т.с $q + \varepsilon < 1$

при $q > 1$ избираме такова q т. че

$$1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$$

при $q = 1 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow 1$

$$\sum 1/n^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \longrightarrow 1$$

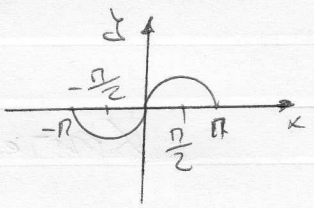
Функция

$f(x)$ $\quad x \in (D)$ - дефиниционно множество

$y = f(x)$

$D \xrightarrow{f} f(D)$ - образ

$(x, f(x))$ графика



$g(f(x)) = x$

$f(g(y)) = y$

Граница на функция

Хайне

$\lim f(x) = L$ - граница $\Rightarrow x \to x_0$ и $x \neq x_0$

$x_1, x_2 \dots x_n \to x_0 \quad x_n \neq x_0$

$f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n) \to L$

За всяка редица стойности се взем x_0 имаме функция стойности се взем L - граница

Коши

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \to L \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такива че

$$|x - x_0| < \delta$$
$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Хайне е еквивалентно на Коши

Доказателство Коши $\to$ Хайне

$\varepsilon > 0 \to \delta \quad N$

$|x_n - x_0| < \delta \quad n > N$

$|f(x_n) - L| < \varepsilon$

Доказателство Хайне $\to$ Коши

Допускаме обратното т.е. $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_n = 1/n$

$\exists |x_n - x_0| < \delta_n$ и $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$

$x_1, x_2 \dots x_n \to x_0, \; x_n \neq x_0$

$|x_n - x_0|$ имаме $\to x_0$

$|f(x_n) - L|$ имаме противоречие с условието

Свойства

① $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = L_1 \pm L_2$$ / Хайне

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = L_1 L_2$ / Хайне

③ $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

④ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq g(x) \Rightarrow L_1 \leq L_2$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L_1$ – дясна граница

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L_2$ – лява граница

Непрекъснатост на функция

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Хайне

$x_1, x_2, x_3 \text{ —— } x_n \to x_0$

$f(x_1), f(x_2) \text{ —— } f(x_n) \to f(x_0)$

Коши

$\varepsilon > 0 \quad \delta$

$|x - x_0| < \delta$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$